УДК 532.517
ГРНТИ 30.17.27

АНАЛОГ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАЧАЛА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА

В.Н. КОЛОДЕЖНОВ, доктор технических наук, профессор
ВУНЦ ВВС «ВВА им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

В работе приводится обзор известных аналогов числа Рейнольдса для локальной характеристики ламинарно-турбулентного перехода. Был предложен вариант такого аналога числа Ренольдса, который не зависит от макроразмеров области течения.

Ключевые слова: число Рейнольдса; уравнения Навье-Стокса; ламинарно-турбулентный переход.

THE ANALOGUE OF THE REYNOLDS NUMBER FOR THE LOCAL CHARACTERISTICS OF THE BEGINNING OF THE LAMINAR-TURBULENT TRANSITION

V. N. KOLODEZHNOV Doctor of Technical Sciences, Professor
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)

The paper provides an overview of the known analogs of the Reynolds number for the local characteristics of the laminar-turbulent transition. Version of the analog Reynolds number have been proposed, which is independent of the flow region macrosizes.

Keywords: the Reynolds number; Navier-Stokes equations; laminar-turbulent transition.

Введение. Не будет излишним преувеличением утверждение о том, что турбулентный режим является наиболее естественной и распространенной формой течения, наблюдаемой повсюду, как в природных явлениях, так и в процессах, реализуемых в самых различных проточных элементах технологических систем. Список технических приложений, где реализуются турбулентные режимы течения, достаточно широк: гидроприводы, трубопроводы для подачи топлива, элементы гидро- и пневмоавтоматики, топливные форсунки, обтекание рабочих поверхностей летательных аппаратов, течения в камерах сгорания и т.д. В этом смысле, ламинарная форма течения – это весьма узкоспециализированный режим. Такие течения подчиняются классическим уравнениям Навье-Стокса. При этом, для них в пространственных областях с достаточно простой геометрией получены хорошо известные решения в аналитической форме (течения Блазиуса, Пуазейля, Куэтта, Колмогорова и др.).

Следует отметить, что ламинарные режимы течения являются весьма важными для технических приложений в связи с тем, что они обеспечивают сравнительно малые потери на сопротивление. Именно поэтому особый интерес представляют вопросы прогнозирования начальной стадии перехода ламинарной формы течения в турбулентную, которая определяет, по сути, диапазон существования ламинарного режима [1-4]. Наиболее известное по форме условие начала перехода в общем (без учета некоторых деталей, основанных на результатах гидродинамической теории устойчивости) сводится к выполнению некоторого неравенства. Такое неравенство, записанное в безразмерном виде, накладывает по совокупности ограничение на плотность и динамическую вяз-

СОДЕРЖАНИЕ

кость жидкости, а также на такие макропараметры процесса, как характерные значения размера области течения и скорости потока (как правило, максимальной или средней). Построенный на основе этих параметров безразмерный комплекс называется числом Рейнольдса. Тогда за основу идентификации начала ламинарно-турбулентного перехода принимается следующий результат. Если для рассматриваемого течения число Рейнольдса превышает некоторое критическое значение, то в рассматриваемой области течения реализуется турбулентный режим течения. В противном случае течение остается ламинарным.

Однако такой подход, хотя и считается общепринятым, не является универсальным. Это проявляется в том, что критическое значение числа Рейнольдса существенным образом зависит от схемы течения. Можно привести примеры, для которых при одном и том же значении числа Рейнольдса, но разных границах области течения в одном случае имеет место ламинарный режим течения, а в другом – турбулентный. Действительно, критическое число Рейнольдса для течения в цилиндрическом канале отличается от такового для обтекания, например, шара. И примеров такого рода великое множество.

В этой связи, целью настоящей работы является разработка такого варианта локального аналога числа Рейнольдса, который может выступить в качестве основы для формирования универсального условия начала ламинарно-турбулентного перехода в конкретной пространственной точке области течения.

Обзор известных подходов к определению условия начала ламинарно-турбулентного перехода. Обширные экспериментальные исследования указывают на то, что для реализации ламинарного режима течения всегда следует обеспечить выполнение соответствующих условий. Как правило, “границу”, определяющую начало ламинарно-турбулентного перехода, связывают с критическим значением безразмерного комплекса, который называется числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho \cdot L \cdot V}{\mu}, \qquad (1)$$

где ρ, μ - плотность и динамическая вязкость жидкости, соответственно; L, V - принимаемые в качестве масштабных, характерные значения размера области течения и скорости потока, соответственно.

Этот безразмерный комплекс (1) возникает в качестве соответствующего параметра по итогам процедуры преобразования системы уравнений Навье-Стокса к безразмерной форме записи. Вводя тогда в рассмотрение критическое значение Re_{crit} этого параметра, условия реализации соответствующих режимов течения обычно формулируют следующим образом. Если для рассматриваемого течения выполняется условие $Re < Re_{crit}$, течение считается ламинарным. Если же $Re > Re_{crit}$ -, соответственно, турбулентным. При этом, как отмечалось уже выше во введении, значение Re_{crit} не является универсальным. Оно, как правило, определяется на основе экспериментальных данных для каждой конкретной схемы течения в отдельности.

Учитывая отсутствие универсальности числа Рейнольдса, уже достаточно давно и неоднократно предпринимались попытки введения различных аналогов этого параметра. Эти аналоги – безразмерные комплексы – использовались для локальной характеристики перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Иначе говоря, образуя скалярное поле в пространственной области течения, эти комплексы не только определяли условие начала перехода, но и “указывали” на ту пространственную точку, в которой в первую очередь складывались условия “инициирования” такого перехода. Такие комплексы, как правило, определялись, в том числе, и более тонкими “дифференциальными” свойствами поля скоростей на предмет учета их влияния на начало перехода. В качестве примеров таких комплексов приведем в хронологическом порядке результаты из некоторых работ.

Возможно, одной из первых работ в этом направлении (по крайней мере, из оказавшихся доступными нам литературных источников) можно считать работу [5], в которой для течения в пограничном слое вводится следующий параметр стабильности:

$$\chi = \frac{\rho \cdot y^2}{\mu} \cdot \frac{dU}{dy}, \tag{2}$$

где U - касательная к обтекаемой поверхности составляющая скорости; y - координата, отсчитываемая от поверхности по нормали к ней.

Такой безразмерный параметр (2) принимает нулевое значение на обтекаемой поверхности. Кроме этого, предполагается, что вдали от нее, т.е. на условной внешней границе пограничного слоя этот параметр также приближается к нулевому значению. На некотором же промежуточном, но конечном расстоянии от обтекаемой поверхности этот параметр принимает максимальное значение χ_{max}. Согласно [5], в окрестности такой пространственной точки располагается зона первичной нестабильности (zone of initial instability). Естественно полагать, что значение χ_{max} будет определяться величиной скорости набегающего потока. В работе H. Rose [5] со ссылкой на эксперименты отмечается, что критическое значение этого параметра, соответствующее началу перехода, находится на уровне $\chi_{max} \approx 500$.

Несколько позже в работе N.W. Ryan и M.M. Johnson [6] для течения в цилиндрическом канале был введен более сложный параметр посредством соотношения:

$$Z = \frac{R \cdot \rho \cdot U}{\tau_W} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{3}$$

где R - радиус канала; U - скорость жидкости в канале; y - координата, отсчитываемая от стенки канала по нормали к ней внутрь области течения; τ_W - касательное напряжение на стенке канала.

В некоторой точке сечения канала с радиальной координатой, удовлетворяющей условию $r = R/\sqrt{3}$, этот параметр достигает своего максимального значения:

$$Z_{max} = \sqrt{\frac{4}{27}} \cdot \frac{D \cdot V \cdot \rho}{\mu}, \tag{4}$$

где D - диаметр трубы; V - средняя скорость жидкости в канале.

Как следует из (4), максимальное значение параметра (3) оказывается пропорциональным числу Рейнольдса. Поэтому при достижении числом Рейнольдса своего критического уровня 2100, соответствующего началу перехода, максимальное значение (4) этого параметра также достигает критического уровня, равного в данном случае $Z_{crit} = 808$.

Развитие последнего результата нашло свое отражение в работе R.W. Hanks [7], где был предложен еще один вариант безразмерного комплекса, распределенного по области течения и локально характеризующего начало перехода ламинарной формы течения в турбулентную:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\left| grad(\overline{U} \cdot \overline{U}) \right|}{\left| \overline{F} - grad(P) \right|}, \tag{5}$$

СОДЕРЖАНИЕ

где $\overline{U}$ - вектор скорости жидкости; $\overline{F}$ - вектор плотности массовых сил; P - давление.

Применительно к одномерному течению в канале, в отсутствии массовых сил, этот комплекс принимает вид:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{d(U^2)/dr}{dP/dz}, \qquad (6)$$

где r - радиальная координата; z - координата, отсчитываемая вдоль оси канала.

Здесь, как и в предыдущем случае, комплекс (5) в форме (6) принимает некоторое максимальное значение в соответствующей точке рассматриваемой области течения. При этом начало перехода в работе R.W. Hanks [7] связывается с достижением этим максимальным значением некоторого критического уровня.

В работах Л.С. Артюшкова [8, 9], используя результаты работы R.W. Hanks [7] и принимая за основу уравнение динамики жидкости в форме Громеко, рассмотрен параметр, который также может служить локальной характеристикой режима течения:

$$K = \frac{\left|\rho \cdot (\overline{U} \times \overline{\omega})\right|}{\left|div(\Pi)\right|}, \qquad (7)$$

где $\overline{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения частиц жидкости; Π - тензор вязких напряжений. При этом, естественно, что все эти характеристики определяются в рассматриваемой пространственной точке области течения.

Пусть в некоторой пространственной точке этот комплекс (7) принимает свое максимальное значение. Тогда предполагается следующее. В случае, когда это максимальное значение достигнет некоторого критического уровня $K_{кр}$, здесь “и произойдет ламинарно-турбулентный переход” [9].

Применительно к одномерному течению в цилиндрическом канале этот комплекс трансформируется к виду:

$$K = \rho \cdot U \frac{dU}{dr} \Big/ \left(\mu \cdot \frac{d^2U}{dr^2} \right), \qquad (8)$$

где U - продольная составляющая скорости; r - радиальная координата, отсчитываемая от оси канала.

Этот же результат (8) для рассматриваемого частного случая, напрямую, получается из (5) в предположении о не учете влияния массовых сил.

Используя соответствующие инвариантные величины, в работах В.Н. Колодежнова [10, 11] был введен в рассмотрение следующий безразмерный комплекс:

$$K = \frac{\left|grad\{E_k\}\right|}{\left|grad\left\{\mu(I_1, I_2, I_3) \cdot \sqrt{|I_2|}\right\}\right|}; \quad E_k = \frac{\rho \cdot U^2}{2}, \qquad (9)$$

где μ - динамическая вязкость жидкости, представляющая собой функцию трех инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора скоростей деформаций; U - скорость частиц жидкости; E_k - плотность кинетической энергии.

Здесь, опять же, предполагается, что достижение максимальным значением этого комплекса (9) в некоторой пространственной точке области течения соответствующего критического уровня приводит к началу ламинарно-турбулентного перехода.

СОДЕРЖАНИЕ

Для традиционных ньютоновских жидкостей динамическая вязкость является постоянной величиной $\mu = const$. Тогда выражение (9) в такой ситуации упрощается и в соответствующих частных случаях приводит к соотношениям вида (6) или (8).

С использованием (9) были рассмотрены некоторые особенности развития поля скоростей в случае плоского течения жидкости на начальной стадии перехода к турбулентности [12].

H.S. Dou в [13], используя плотность полной механической (потенциальной и кинетической) энергии потока

$$E_{p-k} = P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2,$$

был введен в рассмотрение в “привязке” к линиям тока следующий безразмерный комплекс:

$$K = \frac{\partial E_{p-k} / \partial n}{\partial E_{p-k} / \partial s} = \frac{\partial P / \partial n + \rho \cdot U \cdot (\partial U / \partial n)}{(\mu \cdot \nabla^2 \overline{U})_s} . \qquad (10)$$

Числитель последнего комплекса представляет собой градиент плотности полной механической энергии в направлении нормали к линии тока, а, соответственно, знаменатель – ее градиент вдоль линии тока.

Как и в других описанных выше подобных комплексах, здесь достижение максимальным значением (10) критического уровня интерпретируется, как начало ламинарно-турбулентного перехода.

Принимая (10) в качестве параметра, характеризующего переход, был проведен анализ условий его начала для самых различных вариантов известных течений [14-16].

Безразмерные комплексы, локально учитывающие дифференциальные свойства поля скорости, рассматривались также и для анализа течений с пульсационными составляющими скорости.

В частности, в работе J.J. Tao, S.Y. Chen и W.D. Su [17] в системе отчета $\{x_1, x_2, x_3\}$, связанной с линией тока, было рассмотрено базовое плоское течение с составляющими скорости $\{U_0(x_2), 0, 0\}$, на которые наложены соответствующие малые возмущения $\{u, v, w\}$. Для локальной характеристики такого течения был предложен следующий параметр

$$\alpha = \rho \cdot v \cdot (U_0 + u) \cdot \frac{dU_0}{dx_2} \Bigg/ \left(U_0 \cdot \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_i} \right); \quad i = 1,2,3; \qquad (11)$$

где τ_{1i} - компоненты тензора напряжений.

При этом дальнейшая характеристика рассматриваемого течения проводится на основе анализа максимального значения такого параметра (11)

Все описанные выше безразмерные комплексы и параметры, введенные для локальной характеристики возможного начала перехода ламинарной формы течения в турбулентную, учитывают не только величину скорости потока, но также и более тонкие “дифференциальные” свойства поля скорости (положение экстремумов скорости, точки перегиба профиля скорости и др). Это отличает их от традиционного числа Рейнольдса, учитывающего лишь величину скорости. Вместе с тем, по своему смыслу такие комплексы являются аналогами числа Рейнольдса. При этом многие комплексы, а именно (5), (7), (9), (10) построены на основе инвариантных величин и не зависят от рассматриваемой схемы течения или формы области течения, что также отличает их от традиционного числа Рейнольдса.

СОДЕРЖАНИЕ

Описанные безразмерные комплексы тесно связаны посредством соответствующих функциональных зависимостей с традиционными числами Рейнольдса. Как известно, достижение числом Рейнольдса некоторого критического значения связывается с началом перехода. Поэтому для всех этих комплексов в различных цитированных выше работах выдвигается примерно одна и та же гипотеза, согласно которой достижение максимальным (по пространственной области течения) значением соответствующего комплекса некоторого критического уровня приводит к началу перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

Предлагаемый аналог числа Рейнольдса. Введем для локальной характеристики полей скорости $\overline{u}$ и давления P два следующих вектора

$$\overline{E} = grad\left\{P + \frac{\rho \cdot u^2}{2}\right\}; \qquad \overline{D} = grad\left\{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{|I_2|}\right\}, \tag{12}$$

$$I_2 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \cdot \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2;$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3\ ; \quad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\ ,$$

где u_i - компоненты вектора скорости; ε_{ij} - компоненты тензора скоростей деформаций; I_2 - второй инвариант тензора скоростей деформаций.

Здесь и далее все соотношения записаны в локальной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало отсчета которой располагается в рассматриваемой точке области течения. При этом одна из осей, например, ось Ox_1 направлена по касательной к линии тока в этой точке.

Заметим, что вектор $\overline{E}$ характеризует собой направление и “быстроту” (по пространственным координатам) максимального нарастания плотности полной механической энергии потока жидкости в рассматриваемой точке области течения. Совершенно аналогично, вектор $\overline{D}$ характеризует направление и “быстроту” (по пространственным координатам) максимального нарастания, но уже фактора вязкой диссипации в рассматриваемой точке области течения.

Используя вектора (12), введем в рассмотрение “привязанные” к локальной системе координат характерные масштабные значения для длины, давления и второго инварианта тензора скоростей деформаций следующим образом:

$$L_S = \frac{\mu \cdot E_S}{\rho \cdot u_S \cdot D_S}; \qquad P_S = \frac{\rho^3 \cdot u_S^5}{\mu \cdot E_S}; \qquad I_{2S} = \left(\frac{E_S}{\rho \cdot u_S}\right)^2; \tag{13}$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}; \qquad D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}\ ,$$

где E_i, D_i, $i = 1,\ 2,\ 3$; - проекции векторов (12) на координатные оси локальной системы отсчета.

В (13) нижний индекс S указывает на то, что соответствующие величины вычислены в рассматриваемой точке (начале отсчета локальной системы координат).

Если теперь, с учетом (13) провести в уравнениях Навье Стокса традиционную процедуру перехода к безразмерной форме записи, то в итоге это приведет к следующим безразмерным комплексам:

СОДЕРЖАНИЕ

$$K_1 = \frac{\rho \cdot L_S \cdot u_S}{\mu} = \frac{E_S}{D_S}; \qquad K_2 = \frac{I_2 \cdot \rho^2 \cdot u_S^2}{E_S^2}; \qquad K_3 = \frac{\rho^2 \cdot u_S^3}{\mu \cdot E_S}. \qquad (14)$$

При этом комплекс K_1 по своему «месторасположению» в уравнениях Навье-Стокса окажется в точности на той позиции, где традиционно располагается число Рейнольдса, а комплекс K_3 - на позиции числа Эйлера.

В итоге, на основе такого подхода к выбору локальных масштабных величин приходим к выводу, что безразмерный комплекс K_1 можно рассматривать, в том числе и по своему смыслу, как прямой локальный аналог числа Рейнольдса. При этом отметим, что введенные локальные безразмерные комплексы (14) построены исключительно из инвариантных величин и напрямую не связаны с какими-то конкретными макроразмерами области течения.

Поскольку безразмерный комплекс K_1 представляет собой некую модификацию числа Рейнольдса, естественно, что в дальнейшем он может быть использован при формировании условий, выполнение которых обеспечивает переход ламинарной формы течения в турбулентную. Причем, меняя выбор исходной точки в рассматриваемой области течения, каждый раз будем получать соответствующее такому выбору новое значение K_1. Иначе говоря, для всей области течения, безразмерный комплекс, образуя поле, будет представлять собой скалярную функцию пространственных координат выбираемой точки, характеризуя локально (в малой окрестности этой точки) степень возможного начала ламинарно-турбулентного перехода.

При этом по аналогии с результатами приведенных выше работ будем предполагать следующее. Пусть в некоторой пространственной точке области течения безразмерный комплекс K_1 принимает максимальное значение K_{1max}. Если при этом K_{1max} превышает некоторое критическое значение K_{1crit}, то такая точка начинает выступать в качестве инициатора перехода ламинарной формы течения в турбулентную, по крайней мере в окрестности такой точки. В противном случае, т.е. при $K_{1max} < K_{1crit}$, течение в окрестности рассматриваемой точки остается ламинарным.

Заключение. Предложенный аналог числа Рейнольдса создает предпосылки для проведения анализа произвольных течений на предмет выявления локальных условий начала перехода ламинарной формы течения в турбулентную. При этом появляется возможность фактически идентифицировать конкретное место (некую зону) области течения, которая в первую очередь может выступить в качестве инициатора такого перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости / Пер. с англ.. М.: Мир, 1981. 638 с.

2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 367 с.

3. Жигулев В.М., Тумин А.Н. Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987. 283 с.

4. Возникновение турбулентности в пристенных течениях / А.В. Бойко, Г.Р. Грек, А.В. Довгаль, В.В. Козлов. Новосибирск: Наука, 1999. 328 с.

5. Rose H. Elemantary Mechanics of Fluids // N.Y. Dover Publications. 1946. 376 p.

6. Ryan N.W., Johnson M.M. Transition from laminar to turbulent flow in pipes // AIChE J. 1959. Vol. 5. No. 4. P. 433–435.
7. Hanks R.W. The Laminar-Turbulent Transition for flow in Pipes, Concentric Annuli, fnd Parallel Plates // A.I.Ch.E. Journal. 1963. Vol. 9. No. 1. P. 45–48.
8. Артюшков Л.С. Переход от ламинарного течения к турбулентному для степенных чисто-вязких неньютоновских жидкостей // Труды ЛКИ. Л.: ЛКИ, 1974. Вып. 89. С. 19–24.
9. Артюшков Л.С. Динамика неньютоновской жидкости. Л: ЛКИ, 1979. 228 с.
10. Колодежнов В.Н. Об одном безразмерном комплексе для моделирования течений вязкой неньютоновской жидкости // Современные проблемы механики и прикладной математики: сб. тр. междунар. школы-семинара. В 2 ч. Воронеж: ВГУ, 2005. Ч. 1. С. 166–168.
11. Колодежнов В.Н. Безразмерные комплексы и критерии подобия в гидроаэромеханике : Справочник. Воронеж: ВГПУ, 2011. 580 с.
12. Колодежнов В.Н. Об одной возможной модели начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода // Вестник ВГТУ. 2012. Т. 8. № 5. С. 25–30.
13. Dou H.S. Mechanism of flow instability and transition to turbulence // Internatoinal Journal Non-Linear Mechanics. 2006. Vol. 41 (4). P. 512–517.
14. Dou H.S., Khoo B.C., Yeo K.S. Energy Loss Distribution in the Plane Couette Flow and the Taylor-Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders // Internatoinal Journal of Termal Science. 2007. Vol. 46. No. 3. P. 262–275.
15. Dou H.S. , Khoo B.C., Yeo K.S. Instability of Taylor Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders // Internatoinal Journal of Termal Science. 2008. Vol. 47. No. 11. P. 1422–1435.
16. Dou H.S. , Khoo B.C., Tsai Y.M. Determining the Critical Condition for Turbulent Transition in a Full-Developed Annulus Flow // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2010. Vol. 73. P. 41–47.
17. Tao J.J., Chen S.Y., Su W.D. Local Reynolds number and thresholds of transition in shear flows // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 2013. Vol. 56. Iss. 2. P. 263–269.

BYBLIOGRAPHY

1. Joseph D. Stability of fluid motions / Transl. from Eng. M.: Mir, 1981. 638 p.
2. Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. Hydrodynamic stability and turbulence. Novosibirsk: Science, 1977. 367 p.
3. Zhigulev V.M., Tumin A.N. The occurrence of turbulence. Novosibirsk: Science, 1987. 283 p.
4. The emergence of turbulence in the near-wall flows / A.V. Boiko, G.R. Grek, A.V. Dougal, V.V. Kozlov. Novosibirsk: Science, 1999. 328 p.
5. Rose H. Elemantary Mechanics of Fluids // N.Y. Dover Publications. 1946. 376 p.
6. Ryan N.W., Johnson M.M. Transition from laminar to turbulent flow in pipes // AIChE J. 1959. Vol. 5. No. 4. P. 433–435.
7. Hanks R.W. The Laminar-Turbulent Transition for flow in Pipes, Concentric Annuli, fnd Parallel Plates // A.I.Ch.E. Journal. 1963. Vol. 9. No. 1. P. 45–48.
8. Artyushkov L.S. The transition from laminar to turbulent flow of power for purely viscous non-Newtonian fluids // Proceedings of the LSI. Leningrad: LSI. 1974. Vol. 89. P. 19–24.
9. Artyushko, L.S. The dynamics of non-Newtonian fluid. Leningrad: LSI, 1979. 228 p.

10. Kolodezhnov V.N. A dimensionless complex for modeling of viscous non-Newtonian fluid // Modern Problems of Mechanics and Applied Mathematics: Proceedings of the International Summer School. In two pt. Voronezh: VSU, 2005. Pt. 1. P. 166–168.

11 Kolodezhnov V.N. The dimensionless complexes and similarity criteria in the hydro-aeromechanics : Handbook. Voronezh: VSPU, 2011. 580 p.

12. Kolodezhnov V.N. On a possible model of the initial stage of Lamynar-turbulent transition // Bulletin of VSTU. 2012. Vol. 8. No 5. P. 25–30.

13. Dou H.S. Mechanism of flow instability and transition to turbulence // Internatoinal Journal Non-Linear Mechanics. 2006. Vol. 41 (4). P. 512–517.

14. Dou H.S., Khoo B.C., Yeo K.S. Energy Loss Distribution in the Plane Couette Flow and the Taylor-Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders // Internatoinal Journal of Termal Science. 2007. Vol. 46. No. 3. P. 262–275.

15. Dou H.S. , Khoo B.C., Yeo K.S. Instability of Taylor Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders // Internatoinal Journal of Termal Science. 2008. Vol. 47. No. 11. P. 1422–1435.

16. Dou H.S. , Khoo B.C., Tsai Y.M. Determining the Critical Condition for Turbulent Transition in a Full-Developed Annulus Flow // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2010. Vol. 73. P. 41–47.

17. Tao J.J., Chen S.Y., Su W.D. Local Reynolds number and thresholds of transition in shear flows // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 2013. Vol. 56. Iss. 2. P. 263–269.

Колодежнов Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru